Erinnerung: Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

(1) **Proposition:** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Der Endomorphismus f ist *blocktrigonalisierbar*, das heisst, es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine Blockdreiecksmatrix der Form $\boxed{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)}$ ist für eine Zerlegung $n = n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \geqslant 1$.

$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \} \; U$

(b) Es existiert ein f-invarianter Unterraum $\{0\} \neq U \subsetneqq V$.

(c) Das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_f(X)$ ist reduzibel in $K[X]$.

Definition: Die *Begleitmatrix* eines normierten Polynoms

$$\varphi(X) \;=\; X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

ist die folgende $n \times n$-Matrix:

$$\boxed{\begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}}$$

(2) **Proposition:** Die Begleitmatrix von φ hat das charakteristische und das Minimalpolynom φ.

(3) **Proposition:** Ist das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_f(X)$ irreduzibel in $K[X]$, so existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ die Begleitmatrix von $\mathrm{char}_f(X)$ ist. Diese findet man mit einem expliziten Algorithmus.

Bew.: Wähle $v \in V \setminus \{0\}$. $\Rightarrow$ $v, f(v), f^2(v), \dots$ lin. abhängig.

Sei m minimal so dass $f^m(v)$ lin. abh. von $v, f(v), \dots, f^{m-1}(v)$ ist.

$\Rightarrow$ $v, f(v), \dots, f^{m-1}(v)$ lin. unabh. und $m \geq 1$.

Sei $U := \langle v, \dots, f^{m-1}(v) \rangle$. Dann ist $f(U) \subset U$,

denn $\forall i < m-1$: $f(f^i(v)) = f^{i+1} \in U$,

$f(f^{m-1}(v)) = f^m(v) \in U$.

Also U f-invariant und $U \neq 0$. Wegen (1) folgt $U = V$.

Bezüglich $B := (f^{m-1}(v), \dots, f(v), v)$ ist ${}_B[f]_B$ eine Begleitmatrix.

mit char. Pol. $\mathrm{char}_f(X)$ qed.

Satz: Es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ die Blockdreiecksgestalt

$$\boxed{\begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & A_r \end{pmatrix}} \Rightarrow \mathrm{char}_f = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{char}_{A_i}$$

hat, wobei jedes A_i die Begleitmatrix eines irreduziblen Faktors von $\mathrm{char}_f(X)$ ist. Dabei sind die A_i bis auf Vertauschung durch f eindeutig bestimmt.

Bew.: $V = 0$ ✓

$\mathrm{char}_f(X)$ irred. $\Rightarrow$ OK nach (3).

$\mathrm{char}_f(X)$ red, $\deg > 0$ $\Rightarrow$ Wende (1) an nach

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{matrix} \}>0 \\ \}>0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} C & * \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

Induktion über $\dim(V)$.

IV $\Rightarrow$ $\exists\, U, V$ invbar : UCU^{-1}, $VC'V^{-1}$ die gewünschte Gestalt.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} {}_B[f]_B \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} UCU^{-1} & * \\ 0 & VC'V^{-1} \end{pmatrix} \text{ ebenso.}$$

$\shortparallel$

${}_{B'}[f]_{B'}$ für eine geord. Basis B'.

qed.

Bemerkung: Im Fall $K = \mathbb{R}$ hat dann jeder Block die Grösse 1 oder 2; siehe §7.5.

$\rightsquigarrow$ irred. $(X-\lambda)$ oder (X^2+bX+c) mit $b^2-4c<0$.

$A_i = (\lambda)$ $\quad \begin{pmatrix} -b & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$

φ

Satz: Das Minimalpolynom von f hat dieselben irreduziblen Faktoren und dieselben Nullstellen wie das charakteristische Polynom von f.

ψ

Bew.: Cayley Hamilton: $\psi(f) \Rightarrow \varphi \mid \psi$.

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix}$$

wie oben

p irred. Faktor von $\mathrm{char}_f = \psi$

$\Rightarrow \exists i: \; p = \text{Min.Pol. von } A_i$

$$\varphi(f) = 0 \Rightarrow \varphi({}_B[f]_B) = 0 \Rightarrow \varphi(A_i) = 0.$$

$\Downarrow$

$p \mid \varphi$.

Also haben φ, ψ dieselben irred. Faktoren.

λ Nullstelle $\Leftrightarrow$ $X-\lambda$ Faktor.

$\Rightarrow$ φ, ψ dieselben Nullstellen.

qed.

9.4 Hauptraumzerlegung

Lemma: Seien $\varphi(X), \psi(X) \in K[X]$ teilerfremd mit $(\varphi\psi)(f) = 0$. Dann gilt

$$V = \mathrm{Kern}(\varphi(f)) \oplus \mathrm{Kern}(\psi(f)),$$

und beide Summanden sind f-invariant.

Bew.: $\forall v \in \mathrm{Kern}(\varphi(f))$: $\varphi(f)(f(v)) = [\varphi(f)\circ f](v) = [f\circ\varphi(f)](v) = f(\varphi(f)(v))$

$\Downarrow$ $\varphi(f)(v) = 0$ $\qquad [\varphi(X)\cdot X](f) = [X\varphi(X)](f)$ $\qquad$ $\| $ $f(0) = 0$.

$\Rightarrow f(v) \in \mathrm{Kern}(\varphi(f))$

Also ist $\mathrm{Kern}(\varphi(f))$ f-invariant. Analog $\mathrm{Kern}(\psi(f))$.

$\Rightarrow U := \mathrm{Kern}(\varphi(f)) \cap \mathrm{Kern}(\psi(f))$ ebenso. $\Rightarrow \begin{cases} \varphi(f)|U = 0 \Rightarrow \chi \mid \varphi \\ \psi(f)|U = 0 \Rightarrow \chi \mid \psi \end{cases}$

Sei χ das Minpol. von $f|U$.

φ, ψ teilerfremd $\Rightarrow \chi = 1. \Rightarrow 1_U = 0_U \Rightarrow U = 0$.

$\varphi(f)(\psi(f)(V)) = (\varphi\psi)(f)(V) = 0 \Rightarrow \mathrm{Bild}(\psi(f)) \subset \mathrm{Kern}(\varphi(f))$

$\Rightarrow \dim(V) - \dim \mathrm{Kern}(\psi(f)) = \dim \mathrm{Bild}(\psi(f)) \leq \dim \mathrm{Kern}(\varphi(f))$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dim \mathrm{Kern}(\varphi(f)) + \dim \mathrm{Kern}(\psi(f)) \geq \dim V \\ \dim[\mathrm{Kern}(\varphi(f)) \oplus \mathrm{Kern}(\psi(f))] \geq \dim V < \infty \end{array}\right] \Rightarrow \mathrm{Kern}(\varphi(f)) \oplus \mathrm{Kern}(\psi(f)) = V.$ qed.

Schreibe nun

$$\boxed{\operatorname{char}_f(X) \;=\; \prod_{i=1}^{r} p_i(X)^{m_i}}$$

mit verschiedenen normierten irreduziblen $p_i(X) \in K[X]$ und Exponenten $m_i \geqslant 1$. $\Big\} \to \forall\, i, j:\ p_i, p_j$ teilerfremd.

Definition: Für jedes i heisst der Unterraum

$$\boxed{\operatorname{Hau}_{p_i}(f) \;:=\; \operatorname{Kern}(p_i(f)^{m_i})}$$

der *Hauptraum* oder *verallgemeinerte Eigenraum* von f zum irreduziblen Faktor $p_i(X)$.

Bemerkung: Für jeden Eigenwert λ von f gilt $\operatorname{Eig}_\lambda(f) \subset \operatorname{Hau}_{X-\lambda}(f)$. $= \operatorname{Kern}((X-\lambda)^{m}(f))$

$$\operatorname{Eig}_\lambda(f) = \operatorname{Kern}(f-\lambda\cdot\mathrm{id}) = \operatorname{Kern}((X-\lambda)(f)) \subset \operatorname{Kern}((X-\lambda)^{m}(f))$$

Satz: Jeder Hauptraum ist f-invariant, und die Einschränkung $f|_{\operatorname{Hau}_{p_i}(f)}$ hat das charakteristische Polynom $p_i(X)^{m_i}$. Ausserdem gilt

$$\boxed{V \;=\; \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Hau}_{p_i}(f).}$$

Folge: Ist $b_{i1}, \ldots, b_{id_i}$ eine Basis von $\operatorname{Hau}_{p_i}(f)$ für jedes i,

setze $B := (b_{11}, \ldots, b_{1,d_1}, \ldots, b_{r d_r}) \Rightarrow {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} * & & & 0 \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$

Bew.: Fixiere i; Wende Lemma an auf $\varphi := p_i^{m_i}$, $\psi := \prod_{j \neq i} p_j^{m_j}$.

$\Rightarrow \varphi\psi = \mathrm{char}_f \Rightarrow (\varphi\psi)(f) = 0$, φ, ψ teilerfremd.

$$\Rightarrow V = \underbrace{\mathrm{Ker}(\varphi(f))}_{\substack{f\text{-invar.} \\ \shortparallel \\ \mathrm{Ham}_{p_i}(f)}} \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(\psi(f))}$$

Sei φ' das charakt. Pol. von $f|\mathrm{Ker}(\varphi(f))$
.. ψ' . — — — — $f|\mathrm{Ker}(\psi(f))$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ \varphi\psi}}{\mathrm{char}_f} = \varphi'\psi'.$$

$\forall p \in K[X]$ irred. $p | \varphi' \Rightarrow p$ teilt das Min.Pol. von $f|\mathrm{Ker}(\varphi(f))$

$\varphi(f)|\mathrm{Ker}(\varphi(f)) = 0 \Rightarrow$ dieses teilt φ.

$\Rightarrow p | \varphi$.

Analog: $p | \psi' \Rightarrow \ldots \Rightarrow p | \psi$.

$\Rightarrow \varphi' = \varphi$, $\psi' = \psi$.

Zerlegung allgemein folgt durch Induktion. qed.

Beispiel: Die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat charakteristisches Polynom $(X-0)^2(X-1)^2$ und die Haupträume

$$\mathrm{Hau}_{X-0}(L_A) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:v_2} \rangle, \qquad \mathrm{Hau}_{X-1}(L_A) = \langle \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_3 :=}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_4 :=} \rangle.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 23 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Av_1 = Av_2 = 0$, $Av_3 = v_3$, $Av_4 = 6v_3 + v_4$

$U := (v_1, v_2, v_3, v_4) \in GL_4(\mathbb{R})$ $\leadsto$ $U^{-1}AU = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Hier $\mathrm{Hau}_{X-0} = \mathrm{Eig}_0$, $\mathrm{Hau}_{X-1} \overset{?}{\neq} \mathrm{Eig}_1$.

$U' := (v_1, v_2, 6v_3, v_4)$ $\leadsto$ $U'^{-1}AU' = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{array}\right)$

9.5 Jordansche Normalform

Definition: Für jedes $k \geqslant 1$ heisst eine $k \times k$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein *Jordanblock der Grösse k zum Eigenwert λ.*

Satz: *(Jordansche Normalform)* Ist f trigonalisierbar, so existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken auf der Blockdiagonalen ist.

Bem.: f trigonalisierbar $\Longleftrightarrow$ char_f zerfällt in Linearfaktoren.

$\mathrm{char}_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$; λ_i verschiedene EWe.

$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hau}_{X-\lambda_i}$. Ersetze V und f durch $\mathrm{Hau}_{X-\lambda_i}$ und $f|\mathrm{Hau}_{X-\lambda_i}$.

Danach ist $\mathrm{char}_f(X) = (X-\lambda)^m$, $m \geq 1$.

$g := f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ erfüllt $g^m = 0$, d.h. g nilpotent.

§86 $\Rightarrow$ $\exists$ Basis s.d. ${}_B[g]_B = \boxed{\begin{matrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{matrix}}$ mit Jordanblöcken zum EW 0.

$$\Longrightarrow {}_B[f]_B = \begin{bmatrix} N+\lambda\cdot I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N+\lambda\cdot I \end{bmatrix} \qquad \text{qed.}$$

Zusatz: Dabei gilt weiter:

(a) Für jedes $k \geqslant 1$ ist die Anzahl der Jordanblöcke der Grösse k zum Eigenwert λ gleich

$$2\dim\mathrm{Kern}\big((f-\lambda\cdot\mathrm{id}_V)^k\big) - \dim\mathrm{Kern}\big((f-\lambda\cdot\mathrm{id}_V)^{k-1}\big) - \dim\mathrm{Kern}\big((f-\lambda\cdot\mathrm{id}_V)^{k+1}\big).$$

(b) Die Diagonalblöcke sind bis auf Vertauschung unabhängig von B.

(c) Die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$.

Bem.: Für $\lambda=0$ siehe §8.6.